

## Zahlenketten – Lösungen

Bevor Sie sich die folgenden Lösungsvorschläge anschauen, bearbeiten Sie die Aufgaben bitte selbst!

Wähle deine Startzahlen so, dass du möglichst nahe an die Zielzahl 100 herankommst. Kannst du 100 erreichen?

und

Welche Zielzahlen zwischen 0 und 100 kann man erreichen? Welche nicht?

Beschreiben Sie anschließend ihre eigenen Lösungsstrategien? Welche unterschiedlichen Herangehensweisen sind bei den Schülerinnen und Schülern denkbar? Welche erwarten Sie?

Viel Spaß! Danach dürfen Sie die Seite drehen ;-)

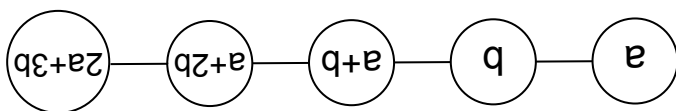
... Sie werden sehen, dass die Kinder weitere tragfähige Aussagen dazu machen können.  
 Die vorletzte Zahl der Kette wird immer um 1 kleiner.  
 Die Mittelzahl wird um 1 größer,  
 Die zweite Startzahl wird immer um 2 kleiner.  
 Die erste Startzahl wird immer um 3 größer.  
 bar?  
 Welche Zahlenmuster sind innerhalb der geordneten Lösungen für Grundschulkinde

Für die Zielzahl 100 gibt es 17 Lösungen:

26 - 16 - 42 - 58 - 100	23 - 18 - 41 - 59 - 100
20 - 20 - 40 - 60 - 100	47 - 2 - 49 - 51 - 100
17 - 22 - 39 - 61 - 100	44 - 4 - 48 - 52 - 100
14 - 24 - 38 - 62 - 100	41 - 6 - 47 - 53 - 100
11 - 26 - 37 - 63 - 100	38 - 8 - 46 - 54 - 100
8 - 28 - 36 - 64 - 100	35 - 10 - 45 - 55 - 100
5 - 30 - 35 - 65 - 100	32 - 12 - 44 - 56 - 100
2 - 32 - 34 - 66 - 100	29 - 14 - 43 - 57 - 100

Damit ergeben sich folgende Lösungen für die Zielzahl 20:

10 - 0 - 10 - 10 - 20	7 - 2 - 9 - 11 - 20
4 - 4 - 8 - 12 - 20	1 - 6 - 7 - 13 - 20



$$\begin{aligned}
 a = 1 &\Leftrightarrow b = 6 \\
 a = 4 &\Leftrightarrow b = 4 \\
 a = 7 &\Leftrightarrow b = 2 \\
 a = 10 &\Leftrightarrow b = 0
 \end{aligned}$$

Lösungen für Lehrerinnen und Lehrer: **Wie erreiche ich die Zielzahl 20 (oder 100)**  
 Setzen Sie zwei Variablen (zum Beispiel a und b) für die ersten beiden Kettenglieder (Startzahlen) mit  $a, b \in \mathbb{N}_0$  ein. [Die Beschränkung auf die natürlichen Zahlen einschließlich der Null ist für die Grundschule sinnvoll, aber nicht zwingend. Sollten Kinder beispielsweise mit negativen Zahlen oder Dezimalzahlen experimentieren wollen, dann kann von dieser Einschränkung des Zahlenraums abgesehen werden.]  
 Es ergibt sich für das fünfte Kettenglied (Zielzahl):  
 $2a + 3b = 20$   $\Leftrightarrow 3b = 20 - 2a$  oder  $2a = 20 - 3b$ .  
 Setzen Sie nun für die erste Startzahl (a) nacheinander die Zahlen 0 bis 10 in den Term  $3b = 20 - 2a$  ein, dann ergeben sich folgende ganzzahlige Lösungen für b:

Zur Forscheraufgabe **"Welche Zielzahlen zwischen 0 und 100 kann man erreichen? Welche nicht?"**

Nutzbar ist die algebraische Form [Zielzahl  $z=2a+3b$ ] auch für diese Forscheraufgabe. Zur Lösung der Aufgabe sind Fallunterscheidungen sinnvoll, die auch für die Kinder 'entdeckbar' sind. Zur übersichtlichen Darstellung gefundener Lösungen kann von der LehrerIn eine Hundertertafel bereitgestellt werden. Die 0 ist in diesem Fall gesondert zu notieren. Tipp: Farben helfen, die gefundenen Lösungen zuzuordnen.

Sind im Unterricht einige der Aufgabenstellungen behandelt worden, so können zuvor gewonnene Erkenntnisse genutzt werden. Verschiedene Möglichkeiten sind denkbar. Hier seien zwei aufgeführt:

Setze  $b = 0$  und verändere  $a$  immer um plus 1  $\Rightarrow z = 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots$

Setze  $b = 1$  und verändere  $a$  wieder um plus 1  $\Rightarrow z = 3, 5, 7, 9, \dots$

Damit sind alle geraden und ungeraden – mit Ausnahme der 1 – gefunden. Nun gilt es grundschulgemäß zu "beweisen", dass es für die Zielzahl 1 keine Lösung mit ganzzahligen, positiven Startzahlen gibt. Erweitert man den Zahlenraum um die negativen Zahlen oder Bruchzahlen, dann wird man auch für die Zielzahl 1 fündig. Haben Sie eine Idee?

Eine zweite (aufwändigere, aber deshalb nicht minderwertige) Möglichkeit wäre ebenso denkbar. Diese Strategie kann stringent aus der Nutzung vorangegangener Fragen abgeleitet werden.

Wenn eine der beiden Startzahlen Null gesetzt wird, ergeben sich bereits zahlreiche Lösungen, die weggestrichen werden können:

Setze  $a = 0$  und  $b$  verändert sich immer um plus 1  $\Rightarrow z = 0, 3, 6, 9, 12, 15, \dots$

Setze  $b = 0$  und  $a$  verändert sich immer um plus 1  $\Rightarrow z = 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots$

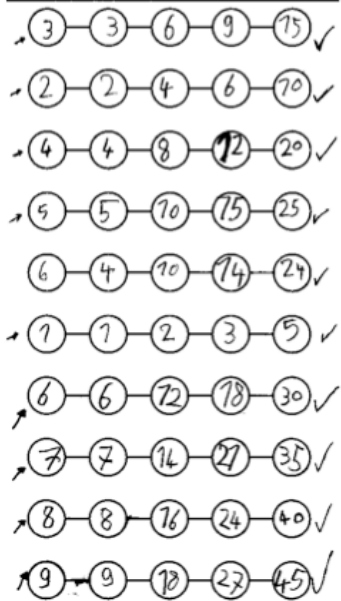
Beide Startzahlen sind gleich [ $a = b \Rightarrow z = 5a = 5b$ ]  $\Rightarrow z = 0, 5, 10, 15, 20, \dots$

Nun kann man sich den verbleibenden (Prim-)Zahlen widmen und wird feststellen, dass alle Zahlen – mit Ausnahme der 1 – erreichbar sind. Die Suche nach den Zahlenketten der verbleibenden Zahlen ist insofern noch einmal ergiebig, weil alle Zielzahlen ungerade sind und die mehrfache Anwendung einer Strategie möglicherweise wieder zu einer Verallgemeinerung hinführen kann.



1	<del>2</del>	<del>3</del>	<del>4</del>	5	<del>6</del>	7	<del>8</del>	<del>9</del>	<del>10</del>
11	<del>12</del>	13	<del>14</del>	<del>15</del>	16	17	<del>18</del>	19	20
<del>21</del>	22	23	<del>24</del>	25	26	<del>27</del>	28	29	<del>30</del>
31	32	<del>33</del>	34	35	<del>36</del>	37	38	<del>39</del>	40
41	<del>42</del>	43	<del>44</del>	<del>45</del>	46	47	<del>48</del>	49	50
<del>51</del>	52	53	<del>54</del>	55	56	<del>57</del>	58	59	<del>60</del>
61	62	<del>63</del>	64	65	<del>66</del>	67	68	<del>69</del>	70
71	<del>72</del>	73	<del>74</del>	<del>75</del>	76	77	<del>78</del>	79	80
<del>81</del>	82	83	<del>84</del>	85	86	<del>87</del>	88	89	<del>90</del>
91	<del>92</del>	<del>93</del>	<del>94</del>	95	<del>96</del>	97	<del>98</del>	<del>99</del>	<del>100</del>

Finde eigene Zahlenketten!



Da kommen immer 5 dazu.  
Aber nur wenn man die  
gleichstartzahlen macht.

Lena (7,1 Jahre; Ende Klasse 1):  
Da kommen immer 5 dazu. Aber nur wenn  
man die gleichen Startzahlen macht.

## **Möglicher Unterrichtsentwurf**

### **1. Phase: Kopfrechnen**

Addition zweier Zahlen im Hunderterraum. Dabei werden die Ergebnisse als neue Summanden aufgegriffen (als Vorbereitung auf Zahlenketten).

### **2. Phase: Einführung 'Zahlenketten'**

Das Raster der Zahlenketten (5 Kreise durch eine "Schnur" verbunden; siehe AB) wird an der Tafel vorgegeben.

L. trägt zwei Startzahlen (5 / 3) ein und berechnet schrittweise die dritte, vierte und fünfte Zahl.

Die Sch. sollen in dieser Phase die Rechenvorschrift erkennen und formulieren.

Einführung der Begriffe 'Startzahl' und 'Zielzahl'

Zwei Sch. wenden die Rechenvorschrift noch einmal an. Daran soll deutlich werden, dass gleiche Startzahlen (hier 6 / 6) und auch die Null (7 / 0) möglich sind. Zudem wird die größere Zahl bewusst als erste Startzahl benutzt.

### **3. Phase: Erreichen der Zielzahl x (oder andere "Forscheraufgabe")**

L. gibt die Problemstellung an die Schülerinnen und Schüler und verteilt das erste Arbeitsblatt. Wichtiger Hinweis an die Sch.: Alle Lösungen werden notiert (auch solche, die von x entfernt sind – nicht radieren oder streichen).

Sch. bearbeiten in Einzel- oder Partnerarbeit die Aufgabe.

### **4. Phase: Zusammentragen der Ergebnisse**

Die Schüler notieren ihre Treffer (auch solche die nahe an x sind) auf einem Lösungstreifen und heften ihn an die Tafel.

### **5. Phase: Klassengespräch**

"Wie können wir die Lösungstreifen geschickt ordnen?"

"Welche Zahlenmuster kann man erkennen?"

Vermutlich fehlen einige Lösungen, die nun herausgearbeitet werden können. Die Schüler bekommen unter Umständen etwas Zeit, um die durch das Muster erkannten Startzahlen zu überprüfen.

Wichtig für den Einstieg:

Haben alle Kinder die Aufgabenvorschrift verstanden und sind in der Lage, die Aufgabe zu beginnen?

Beobachtungsaufgabe für Lehrerinnen und Lehrer:

Welche Vorgehensweisen sind bei den Kindern zu beobachten?

Das ist wichtig für das Auswertungsgespräch im Anschluss an die Arbeitsphase.

Im Auswertungsgespräch ist es unter Umständen sinnvoll, einzelne Kinder zu ermuntern, die eigene Strategie vorzustellen.